PD Emanuel Scheidegger
B. Sc. Thomas Spittler
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Übungsblatt 14

Thetareihen und Thetakonstanten

53. Eisensteinreihen, Jacobi–Thetakonstanten und Eta–Quotienten

   (a) (2 Punkte) Drücken Sie die Eisensteinreihen E_4 und E_6 als Polynome in den Jacobi–Thetakonstanten θ_2, θ_3 und θ_4 aus.

   (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß gilt:

$$E_4(\tau) = \frac{\eta(\tau)^{16}}{\eta(2\tau)^8} + 2^8 \frac{\eta(2\tau)^{16}}{\eta(\tau)^8}.$$

54. Die elliptische Kurve in Hesse–Form und Torsionspunkte

   Zeigen Sie, dass die elliptische Kurve aus Aufgabe 29 folgende Eigenschaften besitzt:

   (a) (1 Punkt) Der Parameter a ist gleich der folgenden Funktion in τ:

$$a(\tau) = \frac{\vartheta_{00}(0, 3\tau)^3 + q^{\frac{1}{2}} \vartheta_{00}(\tau, 3\tau)^3 + q^2 \vartheta_{00}(2\tau, 3\tau)^3}{3q^{\frac{5}{6}} \vartheta_{00}(0, 3\tau) \vartheta_{00}(\tau, 3\tau) \vartheta_{00}(2\tau, 3\tau)}$$

   (b) (2 Punkte) Das Bild eines 3-Torsionspunktes von $E_\tau = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ unter der Abbildung $\phi_3 \colon E_\tau \to \mathbb{CP}^2$ ist ein Wendepunkt. Bestimmen Sie die projektiven Koordinaten dieser Punkte.

   (c) (1 Punkt) Das Bild eines 2-Torsionspunktes der Kubik besteht aus den 4 Punkten $[0 : 1 : -1], [1 : \alpha : \alpha]$, wobei α eine Lösung der kubischen Gleichung $2t^3 - 3at^2 + 1 = 0$ ist.

55. Thetareihen für Gitter

   Eine reelle symmetrische Matrix S vom Rang n heisst positiv, falls für $x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass $x^T Sx > 0$. Eine reelle symmetrische Matrix S vom Rang n heisst ganz, falls für $x \in \mathbb{Z}^n$ gilt, dass $x^T Sx \in \mathbb{Z}$, und heisst gerade, falls $x^T Sx \in 2\mathbb{Z}$. Eine invertierbare Matrix U heisst unimodular, falls sowohl U als auch U^{-1} ganzzahlig sind. Jeder positiven Matrix S kann eine Thetareihe zugeordnet werden, $\Theta_S(\tau) =$

$\sum_{x\in\mathbb{Z}^n} \exp\left(i\pi x^T S x\tau\right)$. Falls S gerade ist, dann hat $\Theta_S(\tau)$ Periode 2 und eine Fourier-Entwicklung der Form $\Theta_S(\tau) = \sum_{m=0} A_S(m) \exp(i\pi m\tau)$. Dabei bezeichnet $A_S(m) = \left|\left\{x \in \mathbb{Z}^n | x^T S x = m\right\}\right|$ die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl m durch die quadratische Form S.

(a) (2 Punkte) Es sei S eine positive Matrix vom Rang n. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\sqrt{\tfrac{\tau}{i}}^n \sqrt{\det S} \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} \exp\left(i\pi(x+w)^T S(x+w)\tau\right) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} \exp\left(i\pi\left(x^T S^{-1} x\left(-\tfrac{1}{\tau}\right) + 2x^T w\right)\right)$$

(b) (1 Punkt) Es sei S eine positive und unimodulare Matrix vom Rang n. Zeigen Sie, dass gilt $\Theta_S\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}^n \sqrt{\det S}\, \Theta_S(\tau)$.

(c) (1 Punkt) Es sei S eine positive gerade und unimodulare Matrix vom Rang $n \in 8\mathbb{N}$. Dann ist $\Theta_S(\tau) \in M_{\frac{n}{2}}(\Gamma_1)$.

56. Jacobis Formel für die Anzahl Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe von vier Quadraten.

Es sei $\Gamma_\vartheta = \left\langle \pm S, T^2 \right\rangle$ die Heckegruppe oder Thetagruppe aus den Aufgaben 16 und 17.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $4E_2(2\tau) - E_2(\tau/2) \in M_2(\Gamma_\vartheta, \chi)$ mit $\chi(T^2) = 1, \chi(S) = -1$ und bestimmen Sie ihre Werte an den Spitzen.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\vartheta^4(\tau) = \frac{1}{3}\left(E_2(2\tau) - E_2(\tau/2)\right)$ gilt.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$A_4(n) = \left|\left\{x \in \mathbb{Z}^4 \left| {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 = n \right.\right\}\right| = 8 \sum_{\substack{4\nmid d|n \\ 1\le d\le n}} d.$$

Verwenden Sie dazu Aufgabe 55 mit einer geeigneten Matrix S.